

УДК 624.04:517.2

# НАДЁЖНОСТЬ ДЛИННОМЕРНОЙ ЛЕГКОДЕФОРМИРУЕМОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ДОРОГЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕРОВНОСТЯМИ

А.С. Гусев, д.т.н., проф., МГТУ им. Н.Э. Баумана / В.И. Щербаков, к.т.н., проф., МГМУ «МАМИ»

Изготовление в заводских условиях неразборных крупногабаритных конструкций с последующей их транспортировкой на место эксплуатации даёт значительный экономический эффект по сравнению с производством отдельных деталей и их доставкой на место сборки. Однако такое техническое решение ограничивается возможностями транспортировки легкодеформируемых конструкций без заметной потери ими работоспособности. Необходим соответствующий расчёт с оценкой вероятности разрушения или появления при транспортировке трещин усталости [1-4].

В качестве основной расчётной схемы рассмотрим транспортную систему, показанную на рис. 1. Транспортируемый длинномерный легкодеформируемый объект  $T$  опирается на две колёсные тележки 1, 2 и движется прямолинейно по длине пути  $\zeta$  с постоянной скоростью  $V$ , совершая вертикальные линейные и угловые колебания в продольной плоскости симметрии системы, то есть принимается плоская динамическая модель. Колебания в продольной плоскости возникают от микронеровностей дороги  $h(\zeta)$  при предположении об одинаковом профиле грунта под левым и правым бортами (колёсами) тележек. Кинематические воздействия на перевозимый объект обозначены через  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Также предполагается,

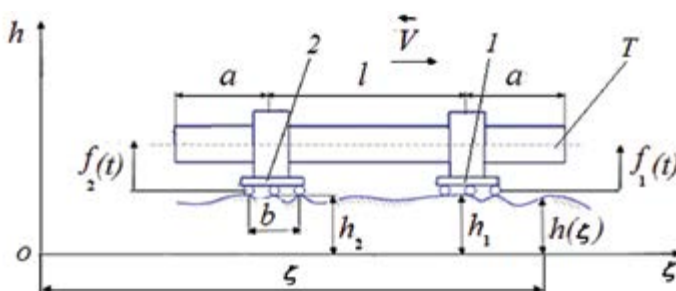


Рисунок 1. Расчётная схема транспортной системы:  $T$  — транспортируемый объект; 1, 2 — опорные тележки;  $a$ ,  $l$  — размеры по длине объекта;  $b$  — длина опорной тележки

что колёсные тележки сглаживают микропрофиль дороги и сохраняют с ним непрерывный контакт. Функция профиля дороги  $h(\zeta)$  задаётся спектральной плотностью  $S_h(\Theta)$ , где  $\Theta$  — путевая частота. Спектральная плотность сглаженного по длине тележки профиля дороги  $\hat{h}(\zeta)$  определяется по формуле [3]

$$S_{\hat{h}} = \frac{S_h(\Theta)}{b^2 \cdot \Theta^2 + 1}.$$

Далее профиль дороги считается сглаженным, и знак сглаживания  $\hat{\cdot}$  не указывается.

Спектральные плотности кинематических воздействий в зависимости от скорости движения  $V$  находятся по следующим зависимостям [3]:

$$S_{f_1}(\omega, V) = S_{f_2}(\omega, V) = \frac{1}{V} \cdot S_h\left(\frac{\omega}{V}\right);$$

$$S_{f_1 f_2}(\omega, V) = S_{f_2 f_1}^*(\omega, V) = \frac{1}{V} \cdot e^{i\omega l / V} \cdot S_h\left(\frac{\omega}{V}\right),$$

где  $\omega = \Theta \cdot V$  — циклическая частота воздействий, \* — знак перехода к комплексно-сопряжённым функциям.

Расчётную схему объекта транспортировки примем в виде балки со следующими распределёнными параметрами (рис. 2, а):  $\mu$  — массой единицы длины,  $EI_x = const$  — жёсткостью поперечного сечения на изгиб и  $b_c$  — коэффициентом вязкого демпфирования единицы длины. Через  $v = v(z, t)$  обозначим прогиб поперечного сечения балки с текущей координатой  $z$  в момент времени  $t$  (рис. 2, б). Тогда дифференциальное уравнение изгибных колебаний балки можно представить в виде [4]

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b_c \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + EI_x \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = \mu \cdot \ddot{f}(z, t), \quad (1)$$

где

$$\ddot{f}(z, t) = \frac{z-a}{l} \cdot \ddot{f}_1(t) + \frac{a+l-z}{l} \cdot \ddot{f}_2(t),$$

а начало отсчёта для  $z$  принято на левом конце балки. Две точки сверху параметра означают вторую производную по времени  $t$ .

Решение уравнения (1) ищем в виде разложения по собственным формам колебаний  $\varphi_k(z)$ :

$$v(z, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) \cdot \varphi_k(z), \quad (2)$$

где  $n$  — число собственных форм колебаний, учитываемых в расчёте;  $u_k(t)$  — функции времени (главные координаты), подлежащие определению. На рис. 2, б показана форма колебаний рассматриваемой балки, близкая к первой собственной форме.

Нормальные напряжения  $\sigma(z, t)$  в поперечных сечениях балки будут определяться по формуле

$$\sigma(z, t) = \frac{EI_x}{W_x} \cdot \sum_{k=1}^n u_k(t) \cdot \varphi_k''(z), \quad (3)$$

где  $W_x$  — момент сопротивления поперечного сечения балки изгибу.

Подставив (2) в (1), получим соотношение

$$\sum_{k=1}^n \mu \cdot \ddot{u}_k(t) \cdot \varphi_k(z) + \sum_{k=1}^n b_c \cdot \dot{u}_k(t) \cdot \varphi_k(z) + EI_x \cdot \sum_{k=1}^n u_k(t) \cdot \varphi_k^{IV}(z) = \mu \cdot \ddot{f}(z, t), \quad (4)$$

скалярно умножив которое на  $\varphi_k(z)$  и учтя ортогональность собственных форм колебаний, выражаемое уравнением

$$\int_0^l \varphi_i(z) \cdot \varphi_\gamma(z) \cdot dz = 0, \text{ при } i \neq \gamma,$$

получим следующую систему независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_k \cdot \ddot{u}_k(t) + \beta_k \cdot \dot{u}_k(t) + \lambda_k \cdot u_k(t) = Q_k(t), \quad (k = 1, \dots, n). \quad (5)$$

где  $m_k = (\mu \cdot \varphi_k, \varphi_k)$  — обобщённая масса балки, соответствующая  $k$ -й собственной форме колебаний;  $\beta_k = (b_c \cdot \varphi_k, \varphi_k)$  — обобщённый коэффициент вязкого демпфирования, соответствующий  $k$ -й собственной форме колебаний;  $\lambda_k = EI_x(\varphi_k^{IV}, \varphi_k) = EI_x(\varphi_k^n, \varphi_k)$  — обобщённая жёсткость, соответствующая  $k$ -й собственной форме колебаний;  $Q_k(t) = (\mu \cdot \ddot{f}(z, t), \varphi_k)$  — обобщённая внешняя нагрузка, соответствующая  $k$ -й собственной форме колебаний; запятой между функциями обозначено их скалярное произведение.

Уравнение (5) представим в виде

$$\ddot{u}_k + 2n_k \cdot \dot{u}_k + \omega_{0k}^2 \cdot u_k(t) = q_k(t), \quad (6)$$

где

$$2n_k = \frac{\beta_k}{m_k}; \quad \omega_{0k}^2 = \frac{\lambda_k}{m_k}; \quad q_k = \frac{Q_k}{m_k}.$$

Тогда передаточная функция для реакции балки по  $k$ -й координате равна

$$H_k(i\omega) = \frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + 2n_k \cdot i\omega}. \quad (7)$$

Амплитудные спектры процессов  $u_k(t)$  определяются по амплитудным спектрам процессов  $q_k(t)$  по формуле

$$\Phi_{u_k}(\omega) = H_k(i\omega) \cdot \Phi_{q_k}(\omega). \quad (8)$$

Поскольку амплитудные спектры случайных процессов дельта-коррелированы, то имеем следующие равенства [1]:

$$\langle \Phi_{u_i}(\omega_1) \cdot \Phi_{u_\gamma}^*(\omega_2) \rangle = S_{u_i u_\gamma}(\omega_1) \cdot \delta(\omega_1 - \omega_2) = \langle H_i(i\omega_1) \cdot H_\gamma^*(i\omega_2) \rangle \cdot \langle \Phi_{q_i}(\omega_1) \cdot \Phi_{q_\gamma}^*(\omega_2) \rangle = H_i(i\omega_1) \cdot H_\gamma^*(i\omega_2) \cdot S_{q_i q_\gamma}(\omega) \cdot \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (9)$$

где  $\langle \dots \rangle$  — оператор осреднения;  $S_{u_i u_\gamma}(\omega)$  — взаимная спектральная плотность процессов  $u_i(t)$  и  $u_\gamma(t)$ ;  $S_{q_i q_\gamma}(\omega)$  — взаимная спектральная плотность процессов  $q_i(t)$  и  $q_\gamma(t)$ .

Из равенств (9) получим, что

$$S_{u_i u_\gamma}(\omega) = H_i(i\omega) \cdot H_\gamma^*(i\omega) \cdot S_{q_i q_\gamma}(\omega);$$

$$S_{u_k}(\omega) = |H_k(i\omega)|^2 \cdot S_{q_k}(\omega).$$

Тогда из соотношения (2) следует, что спектральная плотность перемещений  $v(z, t)$  будет определяться по формуле

$$S_v(\omega, z) = \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma=1}^n \varphi_i(z) \cdot \varphi_\gamma(z) \cdot S_{u_i u_\gamma}(\omega).$$

При учёте только первой собственной формы колебаний имеем

$$S_v(\omega, z) = \varphi_1^2(z) \cdot S_{u_1}(\omega).$$

Спектральная плотность напряжений  $\sigma(z, t)$  будет определяться по формуле

$$S_\sigma(\omega, z) = \left( \frac{EI_x}{W_x} \right)^2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n \sum_{\gamma=1}^n \varphi_i''(z) \cdot \varphi_\gamma''(z) \cdot S_{u_i u_\gamma}(\omega) \right).$$

При учёте только первой формы колебаний найдём

$$S_\sigma(\omega, z) = \left( \frac{EI_x}{W_x} \cdot \varphi_1''(z) \right)^2 \cdot S_{u_1}(\omega).$$

Полученная вероятностная информация о перемещениях и напряжениях используется для оценки риска  $R$  транспортировки конструкции и определения величины накопленного при транспортировке усталостного повреждения  $\vartheta$ . Под риском транспортировки понимается вероятность  $P$  превышения перемещениями опасного уровня  $v_*$  или напряжениями — опасного уровня  $\sigma_*$  за время движения  $t$ .

Эта вероятность определяется как

$$R = P\{v(\tau) \geq v_*; \sigma(\tau) \geq \sigma_*; \tau \in (0, t)\} = \\ = t \cdot n_0 \cdot \left( \exp\left(-\frac{v_*^2}{2s_v^2}\right) + \exp\left(-\frac{\sigma_*^2}{2s_\sigma^2}\right) \right),$$

где  $n_0$  — эффективная частота колебаний;  $s_v^2, s_\sigma^2$  — дисперсии перемещений и напряжений соответственно.

Тогда надёжность транспортной системы будет вычисляться как вероятность противоположного события, то есть как

$$H = P\{v(\tau) \leq v_*; \sigma(\tau) \leq \sigma_*; \tau \in (0, t)\} = 1 - R.$$

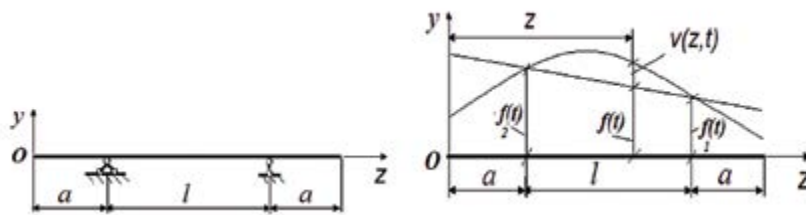


Рисунок 2. Балочная расчётная схема объекта транспортировки: а — в ненагруженном состоянии; б — в возбуждённом состоянии

При нахождении величины накопленного усталостного повреждения полагаем, что уравнение кривой усталости задаётся в виде

$$N = \begin{cases} N_0 \left( \frac{\sigma_{-1}}{\sigma} \right)^m, & \text{при } \sigma \geq \sigma_{-1}; \\ \infty, & \text{при } \sigma < \sigma_{-1}, \end{cases}$$

где  $N_0$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $m$  — параметры кривой усталости.

Усталостное повреждение  $\vartheta$  за время  $t$  составит величину, определяемую по формуле [2]

$$\vartheta(t) = \frac{2^2 \cdot s_\sigma^m \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1, \frac{\sigma_{-1}^2}{2s_\sigma^2}\right) \cdot t}{N_0 \cdot \sigma_{-1}^m \cdot t_0},$$

где  $\Gamma(\dots, \dots)$  — неполная гамма-функция;  $t_0$  — средний период цикла нагружения.

Рассмотрим случай, когда длина консолей балки  $a = 0$  (рис. 2, а) и учитывается только первая форма колебаний:

$$\varphi(z) = \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{l}\right).$$

Получим:

$$m = \frac{\mu \cdot l}{2}; \quad \omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}; \quad q_k = \frac{2}{\pi} (\dot{j}_1 + \dot{j}_2);$$

$$S_q(\omega) = \frac{8 \cdot \omega^4}{\pi^2} \cdot S_f(\omega) \cdot \left(1 + \cos \frac{\omega \cdot l}{v}\right);$$

$$S_u(\omega) = \frac{S_q(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot \omega^2};$$

$$S_\sigma\left(\omega, z = \frac{1}{2} \cdot l\right) = \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \left(\frac{EI_x}{\omega}\right)^2 \cdot S_u(\omega).$$

Спектральная плотность сглаживаемого профиля дороги задаётся как

$$S_h(\Theta) = \frac{2 \cdot s_h^2}{\pi \cdot (1 + b^2 \cdot \Theta^2)} \cdot \frac{\alpha \cdot \beta^2}{(\Theta^2 - \beta^2)^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \Theta^2},$$

где параметры имеют следующие диапазоны значений:  $\alpha = 0,1 \dots 0,2$  м,  $\beta = 0,025 \dots 0,140$  м<sup>1</sup>,  $s_h = 0,10 \dots 0,20$  м.

Для расчёта была выбрана труба длиной  $l = 30$  м, внешним диаметром  $d = 0,2$  м и толщиной  $\delta = 2$  мм.

Длина опорной тележки  $b = 1$  м. Циклическая частота по первой форме колебаний  $\omega_0 = 2$  с<sup>-1</sup>. Параметры кривой усталости:  $m = 4$ ,  $N_0 = 2 \cdot 10^6$  циклов,  $\sigma_{-1} = 40$  МПа. Скорость движения  $v = 50$  км/ч, время в пути  $t = 5$  часов. Параметры спектральной плотности дороги:  $s_h = 0,1$  м,  $\alpha = 0,15$  м,  $\beta = 0,15$  м. Предельно допустимое перемещение в середине трубы  $v_x = 0,2$  м. Предельно допустимое напряжение  $\sigma_x = 0,2$  МПа.

Результаты расчётов:

- надёжность транспортировки  $H = 0,984$ ,
- накопленное повреждение  $\vartheta = 0,12$ .

Было принято решение о возможности и целесообразности транспортировки заданного объекта.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
2. Гусев А.С., Светлицкий В.А. Расчёт конструкций при случайных воздействиях. — М.: Машиностроение, 1984. — 240 с.
3. Гусев А.С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 224 с.
4. Щербаков В.И., Чабунин И.С., Стародубцева С.А. Избранные задачи по динамике механических систем и конструкций. — изд. 2-е, испр. и доп. — М.: МГТУ «МАМИ», 2010. — 288 с.