

УДК 629.331

СОВРЕМЕННЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РАЗГОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОМОБИЛЯ

Е. А. Галевский, д. т. н., проф. / Московский технологический университет

Параметры разгона автомобиля — время, путь, скорость, определяемые теоретически или экспериментально, — являются основными эксплуатационными показателями. Математическая модель, повсеместно применяемая при определении параметров времени и пути разгона, — простейшая одномассовая с действующими на массу силами: движущей и сопротивления (рис. 1). Движущая сила, образующаяся от крутящего момента силовой установки и преобразованная колёсным двигателем, и сила сопротивления движению автомобиля, формируемая внешней средой и качением колёс по дороге, являются нелинейными функциями от скорости движения автомобиля.

Однако, несмотря на сложный процесс образования этих сил, на практике применяется и действует значительное число допущений, упрощающих математическую модель разгона. В первую очередь это относится к сложному силовому воздействию на массу, которое принимается в виде постоянно действующих сил, не зависящих от скорости движения автомобиля. В одномассовой модели не учитывается внутренняя динамика, связанная с колебаниями инерционных масс деталей, соединяемых упруго-демпфирующими связями, поэтому к ведущим колёсам автомобиля подводится не крутящий момент двигателя, а упругий момент, формируемый динамической системой трансмиссии. Не рассматриваются режимы пробуксовки элементов фрикционной муфты (механическая трансмиссия) при подсоединении маховика двигателя к трансмиссии в момент начала движения и при переключении передач, законы изменения фрикционного момента на этих стадиях разгона, влияние динамической системы подвески и типа трансмиссии (блокированная, дифференциальная). Несмотря на перечисленные допущения, одномассовая модель при исследовании процесса разгона остаётся основой всех расчётов. Проанализируем возможности основной модели (методика 1) и предлагаемой модифицированной (методика 2).

Позиционирование автомобиля в пространстве связано с решением уравнения или системы урав-

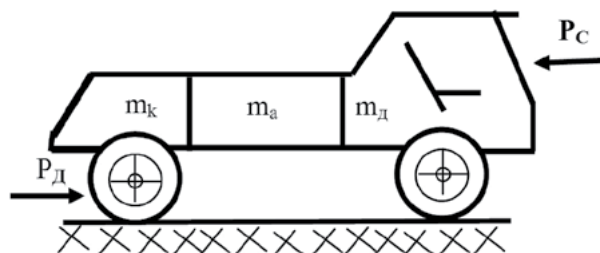


Рисунок 1. Одномассовая модель разгона автомобиля

нений Ньютона, то есть дифференциального уравнения (дифференциальных уравнений) второго порядка. Найти решения этих уравнений в замкнутом виде возможно только в том случае, если составляющие уравнений постоянны или линейно зависят от координат: времени, пути, скорости, ускорения. В противном случае необходимо применять приближённые или численные методы. Обработка экспериментов по изменению сил — действующей и сопротивления — показала, что функции от этих сил могут выражаться через полиномы второго порядка (рис. 2).

Рассмотрим особенности, связанные с расчётом разгона массы автомобиля, для основной (методика 1) и предлагаемой (методика 2) моделей с анализом и обоснованием исходных аналитических уравнений, что является предметом статьи.

Стандартный расчёт (методика 1) времени и пути разгона в зависимости от скорости автомобиля имеет более чем столетнюю давность и основан не только на постоянстве величин силовых факторов, но и на усреднении этих значений на выбранном участке изменения сил: движущей P_d и сопротивления P_c (рис. 3). Общим алгоритмом при расчётах является деление параболических функций (рис. 2, красная линия — движущая сила, тёмно-синяя — сопротивления) на ряд равных участков по абсциссе (скорости). В каждой точке находятся $P_{d,n}$ и $P_{c,n}$ и значения сил усредняются по двум соседним точкам. Усреднение связывается с ординатами функций, то есть $P_{d,CP} = (P_{d,n} + P_{d,n+1}) / 2$ и $P_{c,CP} = (P_{c,n} + P_{c,n+1}) / 2$.

Усреднение по ординате является наиболее простым способом выполнить аппроксимацию нелинейного силового воздействия на автомобиль.

В результате упрощения определения времени и пути разгона от одной точки до другой (рис. 2) были предложены две расчётные зависимости, остающиеся базовыми для методики 1 и в настоящее время:

$$t_{n,n+1} = V_{n,n+1} / j_{n,n+1}; \quad S_{n,n+1} = \frac{V_n + V_{n+1}}{2} \cdot t_{n,n+1}, \quad (1)$$

где $t_{n,n+1}$, $S_{n,n+1}$ — время и путь, затраченные автомобилем на переход от точки n к точке $(n+1)$; $V_{n,n+1}$ — разность скоростей в двух смежных точках; $j_{n,n+1}$ — постоянное ускорение массы на выбранном участке; $(V_n + V_{n+1}) / 2$ — средняя скорость движения массы автомобиля между точками. Несмотря на то, что выражения для времени и пути имеют запись в алгебраической форме, эти зависимости, как оказалось, представляют собой результат решения дифференциального уравнения второго порядка. Рассмотрим этот переход. Исходное дифференциальное уравнение движения массы под действием постоянных сил записывается как

$$\ddot{X} = \frac{P_D - P_C}{m_S}, \quad (2)$$

где m_S — суммарная масса, объединяющая собственно массу автомобиля m_a и приведённые к линейному движению суммарный момент инерции маховика m_D и моменты инерции ведущих и ведомых колёс m_k (рис. 1); $\ddot{X} = j_a$ — ускорение массы. Уравнение (2) — это уравнение с разделяющимися переменными. Решение для первого интеграла (по скорости) имеет вид

$$\dot{X} = \dot{X}^0 \cdot t + \frac{P_D - P_C}{m_S} \quad \text{или} \quad t = \frac{\dot{X} - \dot{X}^0}{j_a}, \quad (3)$$

где \dot{X}^0 , \dot{X} — значения скоростей интервала между точками n и $(n+1)$ соответственно. Второй интеграл выражается зависимостью

$$S = \dot{X}^0 \cdot t + \frac{P_D - P_C}{m_S} \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (4)$$

В уравнении (4) не записано начальное значение \dot{X}^0 , равное нулю. Проведём преобразования (4). С этой целью вынесем за скобки аргумент t и запишем равенство: $S = t \cdot (\dot{X}^0 + \dot{X} \cdot t / 2)$. Заменяя в скобках параметр t из равенства (3), и получим: $S = t \cdot (\dot{X}^0 + \dot{X} \cdot (\dot{X} - \dot{X}^0) / 2 \cdot \dot{X})$ после несложного преобразования приходим к искомому алгебраическому равенству по пути из (1).

Покажем возможность образования ошибки при применении методики 1. Нелинейные функции на участке замещаются прямоугольником с ординатами $P_{D,CP}$ и $P_{C,CP}$, абсциссой t , что должно оказывать влияние на окончательные результаты расчётов и вносить определённую ошибку. Кроме этого, на формирование ошибки влияет очевидная асимметричность в силу нелинейности функций (рис. 3). Точка a , указывающая на пересечение средней линии с кривой, отстоит от вертикальной оси симметрии влево, а точка b для функции сил сопротивления $P_C = f(V^2)$ отстоит вправо. Характер асимметрии вызывает накопление дополнительной ошибки в расчётах. Чтобы избежать неточности в расчётах от асимметрии площадей, необходимо уравновесить полуквадранты, что возможно лишь в том случае, если точки a и b лежат на вертикальной прямой, разделяющей пополам выбранный отрезок абсциссы.

Современная автоматизация управления автомобилем требует точного позиционирования автомо-

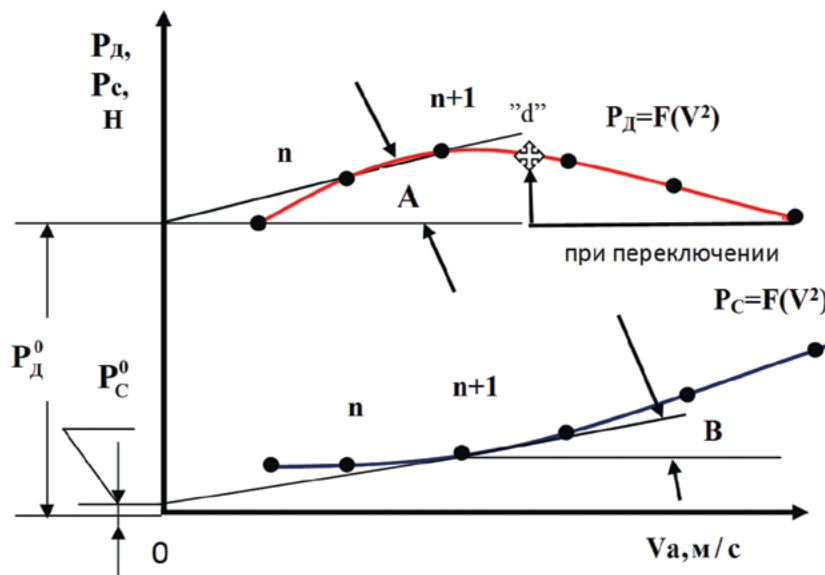


Рисунок 2. Изменение движущей силы (красная) и силы сопротивления (тёмно-синяя) в зависимости от скорости движения массы автомобиля. Функции нелинейны

била в пространстве и времени. Ответом на это требование является применение новой математической модели, учитывающей другую степень приближения к сложным силовым воздействиям на движущийся автомобиль. В предлагаемой методике 2 откажемся от условия постоянства действия на массу усреднённых сил. Представим, что рассматриваемые силы изменяются по линейным законам в зависимости от скорости движения автомобиля (рис. 3, штрихпунктирные линии) на некотором отрезке скорости:

$$P_d = P_d^0 + A \cdot \dot{X}; \quad P_c = P_c^0 + B \cdot \dot{X}, \quad (5)$$

где составляющие равенств (5) подробно представлены на рис. 2. Покажем в сокращённом виде решение дифференциальных уравнений движения массы с учётом линейного изменения сил. Запишем уравнение Ньютона посредством ввода в равенство (2) новых выражений функций из (5):

$$\ddot{X} = \frac{P_d^0 + A \cdot \dot{X} - P_c^0 - B \cdot \dot{X}}{m_s}. \quad (6)$$

Изменим уравнение (6) таким образом, чтобы правая часть равенства содержала только постоянные члены уравнения, а левая — первую и вторую производные по пути:

$$\ddot{X} - \frac{B-A}{m_s} \cdot \dot{X} = \frac{P_d^0 - P_c^0}{m_s}. \quad (7)$$

Упростим (7) введением переменных для постоянных частей равенства $D = (B - A) / m_s$, $D_1 = (P_d^0 - P_c^0) / m_s$ и запишем равенство в исходной дифференциальной форме:

$$\ddot{X} + D \cdot \dot{X} = D_1 \quad (8)$$

Равенство (8) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее решение в аналитическом виде. Представим порядок раскрытия (8). С этой целью сведём уравнение второго порядка к системе уравнений первого порядка подстановкой $Z = \dot{X}$. В результате получим:

$$Z - \dot{X} = 0; \quad (9)$$

$$\dot{Z} + D \cdot Z = 0.$$

Введём частные решения для однородной системы, воспользовавшись подстановкой Эйлера: $e^{\alpha t}$, где α — один из корней системы:

$$X = B_1 \cdot e^{\alpha t}; \quad Z = B_2 \cdot e^{\alpha t}$$

$$\dot{X} = \alpha \cdot B_2 \cdot e^{\alpha t}; \quad \dot{Z} = \alpha \cdot B_2 \cdot e^{\alpha t};$$

Введём частные решения в (10) и, приравняв к нулю правую часть, выполним сокращение на множитель $e^{\alpha t}$:

$$-\alpha \cdot B_1 + B_2 = 0 \\ + B_2 \cdot (\alpha + D) = 0; \quad (10)$$

Полагая в системе (10) компоненты B равными единице, запишем характеристическое уравнение: $-\alpha \cdot (\alpha + D) = 0$. Отсюда корни системы равны: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = D$. Последовательно подставляя α_1 и α_2 в (10), найдём компоненты свободных векторов однородной

системы. Итак: $B_{11} = 1$, $B_{12} = -1/D$, $B_{21} = 0$, $B_{22} = 1$. С учётом корней системы, компонент свободных векторов, произвольных постоянных, зависящих от начальных условий, и частного неоднородного решения запишем следующую систему уравнений по перемещению и скорости движения массы автомобиля:

$$X = C_1 + C_2 \cdot (1/D) \cdot e^{-Dt} + X^*;$$

$$\dot{X} = C_2 \cdot e^{-Dt} + \dot{X}^*, \quad (11)$$

где X^* , \dot{X}^* — частные решения неоднородной системы. Отыщем эти решения. Система уравнений (11) имеет один нулевой корень, следовательно, частное решение отыскивается в виде полинома первой степени $X^* = E \cdot t$ и его производной $\dot{X}^* = E$. Подставим эти решения в (11) и, выполнив преобразования, получим: $X^* = (D_1/D) \cdot t$ и $\dot{X}^* = D_1/D$. Объединяя решения однородной и неоднородной систем и выбирая начальные условия при $t = 0$, запишем в общем виде систему уравнений для расчёта ускорения, скорости и перемещения автомобиля на выбранном участке изменения сил:

$$\ddot{X} = (-\dot{X}^0 + D_1/D) \cdot e^{-Dt};$$

$$\dot{X} = (\dot{X}^0 + D_1/D) \cdot e^{-Dt} + D_1/D; \quad (12)$$

$$X = (e^{-Dt} - 1) \cdot (-\dot{X}^0/D + D_1/D^2) + (D_1/D) \cdot t.$$

Как и в случае математической модели с постоянными силами, в уравнении скорости движения массы из системы (12) найдём величину времени t . Для этого в уравнении (12) перенесём дробь D_1/D в правую часть и выполним деление промежуточного равенства на скобку $(X^0 - D_1/D)$:

$$e^{-Dt} = \frac{\dot{X} \cdot D - D_1}{\dot{X}^0 \cdot D - D_1}. \quad (13)$$

Потенцируя (13), приходим к искомой величине времени:

$$t = \frac{\ln\left(\frac{\dot{X} \cdot D - D_1}{\dot{X}^0 \cdot D - D_1}\right)}{-D}. \quad (14)$$

Подставив найденное значение времени из (14) в систему уравнений (12), получим конкретные величины ускорения, скорости и пути при разгоне с учётом переменных сил. Как вывод: более сложная в сравнении с (1) структура уравнений (12) должна увеличить точность при определении выходных эксплуатационных параметров t , V , S .

Рассмотрим результаты расчёта разгона автомобиля с заданными характеристиками по методикам 1 и 2. Проведём сравнение полученных результатов. В качестве примера заданы следующие параметры: масса $m_a = 2600$ кг; $V_{\max} = 160$ км/ч; коэффициент начального сопротивления качению обобщённого колеса $f_0 = 0,014$; значение фронтальной площади $F = 3,0$ м; коэффициент воздушного сопротивления $W = 0,36$ Н·с²/м⁴; радиус качения

Таблица 1. Изменение времени и пути разгона автомобиля для разных методик

Результаты расчётов. Уменьшение оборотов двигателя от максимальных на 20 мин ⁻¹							
	Стандартная методика 1. Шаг счёта Δ , мин ⁻¹						
	100	50	20	10	5	2	1
t , сек.	65,369	70,272	76,640	81,67	86,67	93,314	98,347
S , м	2 215,850	2 433,10	2 718,60	2 941,73	3 164,09	3 459,43	3 683,09
Предлагаемая методика 2. Силовые факторы переменны							
t , сек.	284,5	278,26	275,52	274,65	274,23	272,86	273,90
S , м	11 958,91	11 682,07	11 560,41	11 521,70	11 502,94	11 442,24	11 488,52

Таблица 2. Путь и время при уменьшении величины максимальной скорости до 159,36 км/ч (-20 мин⁻¹ от максимальных оборотов двигателя)

Результаты расчётов. Уменьшение оборотов двигателя от максимальных на 20 мин ⁻¹							
	Стандартная методика 1. Шаг счёта Δ , мин ⁻¹						
	100	50	20	10	5	2	1
t , сек.	61,67	63,43	61,99	62,21	62,24	62,26	62,27
S , м	2 052,16	2 129,86	2 068,92	2 078,12	2 079,90	2 080,69	2 080,90
Предлагаемая методика 2. Силовые факторы переменны							
t , сек.	62,22	62,1	62,06	62,05	62,05	62,05	62,05
S , м	2 081,36	2 075,9	2 074,56	2 074,21	2 074,11	2 074,08	2 074,08

$r_k = 0,388$ м; минимально устойчивые обороты двигателя: $n_{мин} = 900$ мин⁻¹; обороты при максимальной мощности $n_N = 4 400$ и максимальной скорости $n_v = 5 000$ мин⁻¹; общий КПД трансмиссии с первой по четвертую передачи — 0,92, на прямой пятой — 0,94; обобщённый момент инерции двигателя $I_d = 0,597$ кг·м²; собственный обобщённый момент инерции всех колёс $I_k = 12,58$ кг·м²; передаточное число главной передачи $i_0 = 4,57$; передаточные числа в коробке передач: $i_{k1} = 2,77$, $i_{k2} = 2,15$, $i_{k3} = 1,66$, $i_{k4} = 1,209$, $i_{k5} = 1$; время переключения передач $t_n = 2$ сек.; значения мощности двигателя в трёх опорных точках (при 900, 4 400, 5 000 оборотах) равны: минимальная мощность $N_{мин} = 27,68$, максимальная $N_N = 153,77$, при максимальной скорости $N_v = 128,14$ (всё в кВт).

Для двух методик были написаны отдельные программы в вычислительной среде MATLAB как для постоянных средних величин силовых факторов, так и для линейно изменяющихся сил. Выполненные расчёты с применением программного обеспечения, которое предусматривает изменение в широких пределах параметров автомобиля, сведены в табл. 1 и 2. Рассмотрим данные результатов. Из внесённых в таблицу величин следует, что наблюдается значительный разброс в параметрах разгона по времени и пути для методик 1 и 2. По времени в 4,35, по пути в 5,4 раза при разбиении на участки зависимостей P_d и P_c с интервалом по оборотам, равным $\Delta = 100$ мин⁻¹ и одинаковым для двух методик. И это притом, что алгоритм программ охватывает весь диапазон передаточных чисел трансмиссии; изменение приведённых к поступательному движению

масс автомобиля, моментов инерции маховика, колёс; движение накатом при переключении передач; определение точки d (рис. 2), соответствующей начальной скорости автомобиля на последующей передаче после переключения передачи. Выяснилось, что значительное расхождение в величинах расчёта, особенно на конечной стадии разгона, объясняется не разной аппроксимацией нелинейностей силовых функций, а физическим явлением, суть которого

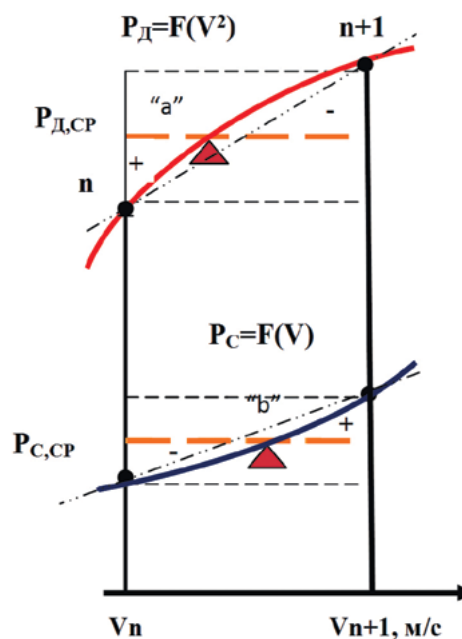


Рисунок 3. Фрагмент ячейки при выборе расчётного метода в период разгона массы автомобиля

заключается в том, что при приближении функций к точке равенства сил (постоянная скорость) ускорение автомобиля стремится к нулю. Из уравнения (1) следует, что время, затрачиваемое на разгон, обратно пропорционально ускорению, следовательно, и значение времени стремится к бесконечности при приближении ускорения к нулю. Таким образом, все варианты расчётов следуют физике этого процесса, но с разной степенью точности: методика 1 показывает большой разброс величин, а методика 2 более стабильна в результатах расчёта (табл. 1).

По результатам расчёта с шагом Δ от 100 до 1 мин⁻¹ модель с постоянными силами имеет значительную погрешность в величинах времени и пути при изменении шага от 100 до 1 оборота в минуту. В ряде работ [1, 2, 3, 4] при нахождении параметров t и S (методика 1) рекомендуют назначать шаг [1] от 2 до 3 км/ч (первая передача), 5–10 км/ч до прямой и 10–15 км/ч на прямой, что в пересчёте на обороты соответствует 500–600 мин⁻¹ на прямой передаче и 400–500 мин⁻¹ на промежуточных. Для методики 1 увеличенный шаг приводит к существенной погрешности в результатах расчётов пути и времени разгона. Авторы работ [2, 3, 4] обходятся общими соображениями в выборе интервалов от n [2, 3] до p [4]. Различия в результатах значений времени и пути по методике 1 достаточно наглядно представлены в табл. 1. Так, при $\Delta = 100$ мин⁻¹ время и путь равны 65,369 сек. и 2 215,85 м, а при $\Delta = 1$ мин⁻¹ соответственно 98,347 сек. и 3 683,09 м.

В обход особой точки с ускорением, равным нулю, расчёт до которой является достаточно грубым приближением, предлагается ввести в алгоритм значение максимальной скорости с небольшой погрешностью. После значительного числа проведённых расчётов оказалось: при уменьшении максимального числа оборотов двигателя на -20 мин⁻¹ (табл. 2), что соответствует скорости 159,36 км/ч с ошибкой 0,4 %, параметры разгона стабилизировались для первой и второй методик. Значения параметров разгона по методике 2 практически не имеют разброса при $\Delta 50$ мин⁻¹.

В заключение сформулируем два основных вывода:

1. В случае проведения расчётов по внешней или частичной характеристикам силовой установки необходимо с целью получения достоверных результатов отстраиваться по оборотам (скорости) от точки пересечения движущей силы с силой сопротивления.

2. Применение методики 2 приводит к более точным и стабильным результатам расчёта при больших и малых шагах счёта Δ на всём диапазоне изменения скоростей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Артамонов М. Д. Теория автомобиля и автомобильного двигателя / М. Д. Артамонов, В. А. Иларионов, М. М. Морин. — М.: Машиностроение, 1968. — 283 с.
2. Агейкин Я. С. Теория автомобиля: учебное пособие / Я. С. Агейкин, Н. С. Вольская. — М.: МГИУ, 2008. — 318 с.
3. Кравец В. Н. Теория движения автомобиля. — Нижний Новгород: НГТУ, 2014. — 697 с.
4. Ларин В. В. Теория движения полноприводных колёсных машин. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. — 391 с.